

EXERCICIS DE SELECTIVITAT DE LA PART D'ANALISI

Us vaig a donar una gran ajuda, podeu trobar els exàmens de selectiu resoltos a l'adreça <http://www.iescarrus.com/edumat/apuntes/selectividad/ciencias.htm> . Un consell feu primer vosaltres els exercicis i si no vos surten consulteu en aquesta pàgina web o me'ls pregunteu.

Setembre 2002 EXERCICI A

PROBLEMA 4. Siga $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$. Trobar a, b, c sabent que f aconsegueix un màxim és $x = -4$ i un mínim en $x = 0$ i que $f(1) = 1$.

Solució: $a = 6$, $b = 0$ i $c = -6$; l'expressió de f serà $f(x) = x^3 + 6 x^2 - 6$

Setembre 2003 EXERCICI A

PROBLEMA 2. En un gran prat s'ha de tancar una zona de 400 m^2 , que ha de tindre forma de rectangle. Cada metre de tanca costa 100 euros. Si x és la mesura en metres d'un dels seus costats, es demana:

a) Obtindre raonadament la funció f tal que f(x) siga el cost de la tanca, indicant entre quins valors pot variar x (1,3 punts).

b) Deduir raonadament el valor de x per al que la funció f(x) aconsegueix el valor mínim (2 punts).

Solució: a) $x \in (0, +\infty)$ b) f(x) aconsegueix el valor mínim per a $x = 20 \text{ m}$, és a dir, per a una zona Vallada quadrada ($x=20 \text{ m}$ i $y=20 \text{ m}$).

Juny 2003 EXERCICI B

PROBLEMA 2. Siga T un triangle de perímetre 60 cm. Un dels costats del triangle T mesura x cm i els altres dos costats tenen la mateixa longitud.

a) Deduir raonadament les expressions de les funcions A i f tal que:

$$A(x) = \text{Àrea triangle } T$$

$$f(x) = \{A(x)\}^2$$

Indicar a més entre quins valors pot variar x

b) Obtin raonadament els valors de x pels quals f(x) alcança el valor màxim (2 punts).

Nota: Per obtenir el màxim dona igual utilitzar A(x) que f(x), però cal tindre en compte que per calcular l'àrea màxima sols serveix A(x)

Solució: a) $A(x) = \frac{x\sqrt{900-30x}}{2}$ i $f(x) = 225x^2 - \frac{15}{2}x^3$ $x \in (0, 30)$ b) $x=20\text{cm}$

Juny 2004 EXERCICI A

PROBLEMA 3. Trobar raonadament el punt de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangent a la corba té pendent màxima i calcular el valor d'este pendent. (3,3 punts)

Solució: el punt on la recta tangent té pendent màxima és $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ i el pendent és $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Juny 2004 EXERCICI B

PROBLEMA 4. Des d'un punt N de la vora del mar, un nedador ha d'alcançar una boia que flota a 3 km de la costa i dista $3\sqrt{5}$ km del punt N. Si recorrent la vora del mar (que es suposa recta i plana), la seua velocitat mitjana és de 5 km/h i nedant de 3 km/h, quant de temps deurà caminar fins llançar-se a la mar, per alcançar la boia en el menor temps possible?

Solució: Recorrerà per terra 3,75 km en un temps de 0,75 hores

Setembre 2004 **EXERCICI B**

Problema 4. Determinar raonadament la longitud del costat del quadrat d'àrea mínima si té els vèrtexs situats damunt els costats d'un altre quadrat de costat 16cm.

Solució: $8\sqrt{2}$ cm

Juny 2005 **EXERCICI A**

Problema 4. Provar que el volum de qualsevol con recte inscrit en una esfera és menor que el 30% del volum de la mateixa.

Nota: Cal buscar el volum màxim del con en funció del seu radi i comparar-lo amb el volum d'una esfera de radi R. Així s'observa que $V_{\text{cono}} < 0.3 * V_{\text{esfera}}$

Juny 2005 **EXERCICI B**

PROBLEMA 3. Trobar les constants reals a i b perquè $f(x) = \begin{cases} x \ln x + a & x > 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{\sin \pi x}{x} & x < 0 \end{cases}$ siga una

funció contínua per a tot valor real x (3,3 punts).

Solució: Perquè f(x) siga contínua per a tot valor real de x, $b = a = \pi$

Juny 2005 **EXERCICI B**

PROBLEMA 4.1. La concentració en sang d'un fàrmac després d'una toma és $C(t) = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035 t^3$ mg/ml, on t és el temps transcorregut en minuts. Es demana:

- a) Calcular el període de temps durant el qual el fàrmac actua (1,8 punts).
- b) Determinar en quin instant la concentració del fàrmac és màxima (1,5 punts).

Solució:

- a) El període durant el qual el fàrmac actua es de 0 a 128,090 minuts
- b) La concentració del fàrmac es màxima al cap de 84,33 minuts.

Setembre 2005 **EXERCICI A**

PROBLEMA 3. a) El perímetre d'un sector circular de radi R és 4 m. Quants radians α ha de mesurar el seu angle central perquè la seua àrea siga màxima? (1,8 punts). (Nota: Perímetre =

$$2R + R\alpha ; \text{Àrea} = \frac{1}{2} \alpha R^2)$$

b) L'àrea d'un altre sector circular és 1 m². Per a quin radi és mínim el seu perímetre? (1,5 punts).

Solució: a) 2 radians b) 1 m

Setembre 2005 **EXERCICI A**

Problema 4. El cabdal d'aigua (es a dir, el volum per unitat de temps) que circula per una canonada cilíndrica és proporcional a la quarta potència del seu radi. Per suministrar una població, s'han previst canonades d'un cert radi, però el fabricant les subministra d'un radio

que és un 0,5% menor. Estimar en quin percentatge es disminuirà el cabdal real respecte del previst.

Nota: Cal buscar la funció que dóna el cabdal en un primer moment i la que dóna el cabdal real. Després cal observar la diferència entre les dos i expressar en % la disminució de cabdal.

Solució: $1,985049937 \approx 2\%$.

Setembre 2005

EXERCICI B

PROBLEMA 3. En el pla es té la corba $y = x^2 + 2x + 1$. Trobeu raonadament les equacions de les rectes que passen pel punt (2, 3) i són tangents a l'esmentada corba (3,3 punts).

Solució: $y = 2x - 1$ i $y = 10x - 17$

Setembre 2005

EXERCICI B

PROBLEMA 4.1. El traçat de dos canals navegables en un mapa discorre segons les rectes $y = x$ i $y = -x$. Dues llanxes motores, A i B, ixen al mateix temps de punts situats sobre cadascun dels canals a distàncies de 20 i 15 km, respectivament, del punt P de confluència dels dos. La llanxa A es dirigeix a P amb velocitat de 30 km/h i la llanxa B es dirigeix a aquest mateix punt P amb velocitat 60 km/h. Es considera menyspreable l'amplària dels canals i la longitud de les llanxes i es demana calcular:

a) La distància entre les llanxes en funció del temps des que inicien el seu recorregut (2,3 punts).

b) La distància mínima a què poden estar les llanxes (1 punt).

Solució: a) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 30t\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 90t\right)^2}$

b) la distància mínima s'alcença quan $t = \frac{-1}{3\sqrt{2}}$ h i és $\sqrt{125}$ km

Juny 2006

EXERCICI B

PROBLEMA 3. Donada la funció $f(x) = \ln x$ en l'interval tancat $[1, e]$, sent $e = 2,718281\dots$:

a) Raonar que hi ha un punt P de la gràfica $y = \ln x$ en què la recta tangent a ella és paral·lela a la recta que passa pels punts A = (1, 0) i B = (e, 1) (1 punt).

b) Obtindre el punt P considerat en a) (1,8 punt).

c) Calcular el pendent de la recta tangent a $y = \ln x$ en eixe punt P (0,5 punts).

Solució:

a) TVM

b) El punt P serà $(e-1, \ln(e-1))$

c) el pendent serà: $\frac{1}{e-1}$

Juny 2006

EXERCICI A

PROBLEMA 4. Una persona camina a la velocitat constant de 3m/s allunyant-se horitzontalment en línia recta des de la base d'un fanal el focus lluminós del qual està a 10m d'altura. Sabent que la persona mesura 1,70m, calcular:

a) La longitud de l'ombra quan la persona està a 5m de la base del fanal (2 punts).

b) La velocitat de creixement de l'ombra als t segons de començar a caminar (1,3 punts).

Nota: la velocitat de creixement és la derivada de l'espai. Per tant cal buscar l'espai i derivar.

Solució: a) 1.02 m b) 0.61 m/s

Juny 2006

EXERCICI B

PROBLEMA 4. El cost del marc d'una finestra rectangular es 12,5€ per metre lineal dels costats verticals i 8€ per metre lineal dels costats horitzontals.

a) Calcular raonadament las dimensiones que deu tindre el marc d'una finestra de 1 m^2 de superfície per tal que resulte el més econòmic possible (2,3 punts).

b) Calcular, també el cost d'eixe marco més econòmic possible considerat en a) (1 punt).

Solució: a) $1,25\text{m} \times 0,8 \text{ m}$ b) 40 €

Setembre 2006

EXERCICI A

PROBLEMA 4. Un incendi s'estén en forma circular uniformement. El radi del cercle cremat creix a la velocitat constant d' $1,8\text{m}/\text{min}$.

a) Obteniu l'àrea cremada en funció del temps t transcorregut des de l'inici de l'incendi (1,3 punts).

b) Calculeu la velocitat de creixement de l'àrea del cercle cremat en l'instant en què el radi arribe als 45 m (2 punts).

Nota: Has de tindre en compte que la velocitat és la derivada de l'espai o superfície cremada.

Solució: a) $S = 3,24\pi^2$ b) $6,48 \cdot 25\pi \text{ m}^2/\text{min}$

Setembre 2006

EXERCICI B

PROBLEMA 3.

a) Obtindre la derivada de la funció $f(x) = ax + b + \sin x$ (0,5 punts). Calcular a i b si $O = (0, 0)$ és un punt de la corba $y = ax + b + \sin x$, la recta tangent del qual en $O = (0, 0)$ és l'eix X (1,8 punts).

b) Justificar que la funció $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x$ s'anul·la en dos punts de l'interval $[0, \pi]$ (0,5 punts).

c) Calcular eixos dos punts (0,5 punts).

Solució:

a) $f'(x) = a + \cos x$, $a = -1$ i $b = 0$ b) $g(0) = 0 = g(\frac{\pi}{2})$ c) $(0, 0)$ $(\frac{\pi}{2}, 0)$

Setembre 2006

EXERCICI B

PROBLEMA 4.

Dos pals de 3 m i 4 m es troben clavats verticalment a terra. Les bases disten 5 m i, en el segment que les uneix, hi ha un punt P que dista x metres de la base del pal més baix. L'extrem superior de cada pal s'uneix amb P mitjançant un segment rectilini de cable. Es demana:

a) Obteniu l'expressió $f(x)$ de la longitud total de cable utilitzat en els dos segments (1,8 punts).

b) Demostreu que aquesta longitud total de cable és mínima quan són iguals els valors absoluts dels pendents dels dos segments considerats (1 punt). Calculeu aquesta longitud mínima (0,5 punts).

Solució: a) $f(x) = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(5-x)^2}$

b) $x = \frac{15}{7} \text{ m}$ i longitud del cable $8,6\text{m}$. Les pendents iguals en valor absolut valen $\frac{7}{5}$

Juny 2007

Problema 3.2. Es considera la funció real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, on a , b i c són paràmetres reals.

a) Esbrinar els valors de a i b per als que les rectes tangents a la gràfica de $f(x)$ en els punts d'abscisses $x = 2$ i $x = 4$ són paral·leles a l'eix X . (2 punts).

b) Amb els valors de a i b trobats anteriorment, obtenir el valor de c per al que es compleix que el punt d'inflexió de la gràfica de $f(x)$ està en l'eix X . (1,3 punts).

Solució: $a = -9$ i $b = 24$, $c = -18$

Juny 2007

Problema 4.1. Uns alts forns produeixen al dia x tones d'acer de baixa qualitat i $\frac{40-5x}{10-x}$ tones d'acer d'alta qualitat. La producció màxima diària d'acer de baixa qualitat és de 8 tones. Si el preu d'una tona d'acer de baixa qualitat és de 100 euros i el preu d'una tona d'acer d'alta qualitat és de 250 euros, demostreu que s'han de produir 5 tones per dia d'acer de baixa qualitat per a que el valor de venda de la producció diària siga màxim. (3,3 punts).

Juny 2007

Problema 4.2. Trobeu les dimensions del cartell d'àrea màxima amb forma de rectangle que té dos vèrtexs subjectes a una estructura rígida parabòlica d'equació $y = 12 - x^2$, i els altres dos vèrtexs estan situats sobre l'eix OX . (3,3 punts).

Solució: 4×8

Setembre 2007

Problema 3.2. Siga la funció $f(x) = \frac{4}{x}$ amb domini els números reals no nuls.

a) Calcular l'equació de la recta tangent i de la recta normal a la gràfica de $f(x)$ en el punt de abscissa $x = 2$. (1,8 punts).

b) Determinar els punts M i N de la gràfica de $f(x)$ pels quals les rectes tangents a la gràfica en M i N es tallen en el punt $(4, -8)$. (1,5 punts)

Setembre 2007

Problema 4.1. Se tenen dos programes informàtics A y B . Para processar n dades, el programa A realitza un número de operacions elementals no superior a $12 + n \cdot \sqrt[4]{n^3}$, mentre que el programa B executa $n^2 - 2n + 10$ operacions elementals. Comprovar que quan el número n de dades és gran, el programa A processa les n dades amb menys operacions elementals que el programa B . (3,3 punts).

Nota: Cal tindre en compte que la n és com la x però sols pot se un nombre natural ja que representa el nombre d'operacions.

Heu de comprovar $n^\circ \text{operacions } A \leq 12 + n \cdot \sqrt[4]{n^3} < n^2 - 2n + 10 = n^\circ \text{operacions } B$

Per fer-ho heu de definir la funció $f(x) = n^2 + 2n - 2 - 12 - \sqrt[4]{n^7} > 0$ estudiant el creixement d'ella. Per fer-ho necessitareu estudiar també el creixement de la seua derivada per veure que és positiva.

Un altra manera es fer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 + n \cdot \sqrt[4]{n^3}}{n^2 - 2n + 10} = 0$ cosa que sols es possible quan el denominador és molt més gran que el numerador.

Setembre 2007

Problema 4.2. La vorera d'un estany està forma per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$ i el segment rectilini que uneix estos dos punts. Un sortidor està situat en el punt de coordenades $(0,2)$. Es demana:

- Determinar, raonadament, el punt del segment rectilini de la vorera de l'estany que està més pròxim del sortidor. (0,8 punts).
- Determinar, raonadament, els punts de l'arco de corba de la vorera de l'estany que estan mes pròxims del sortidor. (1,6 punts).
- Quins són els punts de la vorera de l'estany que estan mes pròxims al sortidor? (0,9 punts).

Solució: a) $(0,0)$ amb distància de 2 b) $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ amb distància $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Juny 2008

Problema 3.2. Se considera la funció real $f(x) = x^2 - 4$. Obtenir, explicant el procés de càlcul:

- La gràfica de la corba $y = f(x)$. (0,7 punts).
- Els valors de x pels quals està definida la funció real $g(x) = \ln f(x)$ (1,3 punts).
- Els intervals de creixement i decreixement de la funció $g(x)$, raonant si té, o no, màxim absolut. (1,3 punts).

Solució: b) $D = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) decreixent en $(-\infty, -2)$ i creixent en $(2, +\infty)$ No té màxim absolut

Juny 2008

Problema 4.1. Una empresa decideix llançar una campanya de propaganda de un dels seus productes editant un text que ocupa 18 cm^2 en fulles rectangulars impreses a una cara, amb marges superior e inferior de 2 cm i laterals de 1 cm. Es demana calcular, raonadament, les dimensions de la fulla per tal que el consum de paper siga mínim. (3,3 punts).

Solució: 10cm x 5cm

Problema 4.2. Una finestra té forma de trapezi rectangular. La base menor mesura 20 cm i el costat oblic mesura 40 cm. Trobar, raonadament, l'angle α que ha de formar el costat oblic amb la base major perquè l'àrea de la finestra siga màxima. (3,3 punts).

Nota: Un trapezi rectangular és un quadrilàter amb dos costats paral·lels i en el que un dels altres dos costats és perpendicular a estos dos costats paral·lels.

Solució: l'àrea de la finestra és màxima si l'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad i l' àrea mesurarà $600\sqrt{3} \text{ m}^2$

Setembre 2008

Problema 4.1. Un mòbil es maneja amb con velocitat constant de 2 m/s, en el primer quadrant, damunt la recta $x=1$, partint del punt $M=(1, 0)$ situat a 1 m de l'origen. Es demana obtindre raonadament:

- Les coordenades del punt $M(t)$ on està situat el mòbil després de t segons. (1 punt).
- La funció $m(t)$ igual a la pendent de la recta que passa pel punt $O=(0, 0)$ i pel punt $M(t)$. (1,3 punts).

c) La derivada de la funció $m(t)$. (1 punt).

Solució: a) $(1, 2t)$ b) $m(t) = 2t$ c) 2

Problema 4.2. En un terreny en forma de semicercle de radi $\sqrt{50}$ metres, se dibuixa un rectangle que té dos vèrtexs damunt la semicircumferència del perímetre del terreny. Els altres dos vèrtexs del rectangle estan damunt el segment rectilini de dit perímetre i disten x metres. Obtindre raonadament:

a) L'àrea del rectangle en funció de x . (1,3 punts).

b) El valor de x pel qual és màxima l'àrea del rectangle. (2 punts).

Solució: b) base 10 i altura 5

Juny 2009

Problema 4.1. Es desitja construir un celler amb forma de paral·lelepípede de 100 m^3 de volum de manera que el llarg de la base siga $3/4$ de l'amplària x de la base. Se sap que els preus d'un metre quadrat de sòl, de sostre i de paret lateral són, respectivament, 225 €/m^2 , 300 €/m^2 i 256 €/m^2 . Determinar raonadament:

a) El valor x de l'amplària de la base que minimitza el cost. (2,3 punts).

b) El cost mínim. (1 punt).

Solució: El valor de x que minimitza el cost és 4, és a dir, cal construir un celler la base de la qual tinga una amplària de 4 m. El cost mínim del celler és de 33600 €

Problema 4.2. Un proveïdor ven un producte a un comerciant al preu de 300 euros la unitat. El comerciant incrementa la quantitat de 300 euros en un 40% para obtindre el preu de venda al públic. El comerciant sap que a eixe preu vendrà 50 unitats cada mes i que durant el mes de rebaixes por cada 3 euros de reducció en el preu de venda de la unitat aconseguirà un increment de ventes de 5 unitats. Es demana determinar, raonadament, el número de unitats que deu demanar al proveïdor per vendre-les en el mes de rebaixes i el preu de venda de cada unitat, per maximitzar els seus beneficis durant eixe període. (2 punts por obtindre el número de unitats i 1,3 punts pel preu de venda).

Setembre 2009

Problema 3.2. Donada la funció real $f(x) = \frac{8}{1+x^2}$ es demana calcular raonadament:

a) Les derivades primera i segona de la funció $f(x)$. (0,8 punts).

b) Els punts d'inflexió de la corba $y = f(x)$. (1 punt).

c) La pendent màxima de les rectes tangents a la corba $y = f(x)$. (1,5 punts).

Solució: a) $y' = \frac{-16x}{(1+x^2)^2}$ $y'' = \frac{48x^2 - 16}{(1+x^2)^3}$

b) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 6\right)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 6\right)$ c) $\pm 3\sqrt{3}$

Setembre 2009

Problema 4.1. A las 7 del mati, una llanxa A està situada a 150 km a l'est d'un altra llanxa B. La llanxa A navega cap a l'oest a una velocitat constant de 40km/h i la llanxa B es dirigeix cap al nord 30 km/h. Si se mantenen eixos rumbos, esbrinar raonadament a quin hora estaran ambdues llanxes a distància mínima. (3,3 punts).

Solució: 2,4 hores. A les 9 hores 24 minuts

Setembre 2009

Problema 4.2. Una làmina metàl·lica rectangular es dilata uniformement per calentament, augmentant la seua base i la seua altura 0,2 mm per minut. Esbrinar la velocitat de creixement de la diagonal de dita làmina quan la base i l'altura de la làmina mesuren, respectivament, 8 i 6 cm. (3,3 punts).

Nota: Has de tindre en compte que la velocitat és la derivada de l'espai. Et demanen la velocitat en el moment en què la base i l'altura alcancen els 8 i 6 cm.

Solució: 0,28 cm/min

JUNY 2010**OPCIÓ A**

Problema A.3. Es vol construir un estadi tancat de 10000 m² de superfície. L'estadi està format per un rectangle de base x i dos semicercles exteriors de diàmetre, de manera que cada costat horitzontal de rectangle és diàmetre d'un dels semicercles. El preu d'un metre de tanca per als costats verticals del rectangle és 1 € i el preu d'un metre de tanca per a les semicircumferències és 2 €. Es demana obtenir raonadament:

- La longitud del perímetre del camp en funció de x (3 punts)
- El cost $f(x)$ de la tanca en funció de x (3 punts)
- El valor de x per tal que el cost de la tanca siga mínim (4 punts)

Solució: a) $L(x) = \frac{40000 - \pi x^2}{2x} + \pi x$ b) $C(x) = \frac{40000 - \pi x^2}{2x} + 2\pi x$ c) $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}}$ m

JUNY 2010**OPCIÓ B**

Problema B.3. Donada la funció polinòmica $f(x) = 4 - x^2$, es demana obtenir raonadament:

- El gràfic de la corba $y = 4 - x^2$. (2 punts).
- El punt P de la corba la tangent de la qual és perpendicular a la recta d'equació $x + y = 0$. (3 punts).
- Les rectes que passen pel punt $(-2, 1)$ i són tangents a la corba $y = 4 - x^2$ i obtenir els punts de tangència. (5 punts).

Solució: b) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ c) $y = 2x + 5$ i $y = 6x + 13$ $(-1, 3)$ i $(-3, -5)$

Setembre 2010**Opció B**

Problema B.3. Dos elements d'un escut són una circumferència i un triangle. La circumferència té centre $(0,0)$ i radi 5. Un dels vèrtexs del triangle és el punt $A(-5, 0)$. Els altres dos vèrtexs del triangle són els punts de la circumferència $B(x, y)$ i $C(x, -y)$. Es demana obtenir raonadament:

- L'àrea del triangle en funció de x . (3 punts).
- Els vèrtexs B i C per als quals és màxima l'àrea del triangle. (5 punts).
- El valor màxim de l'àrea del triangle. (2 punts).

Solució: a) $A(x) = 2\sqrt{25 - x^2}(5 + x)$

b) $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{75}}{4}\right)$ i $\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{75}}{4}\right)$

c) $\frac{15\sqrt{75}}{4} u^2$